УДК 514.752

# О НЕГОЛОНОМНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $E_4$

О.В. Васильева

Томский государственный университет
E-mail: vov23@mail.ru

*В четырехмерном евклидовом пространстве рассматриваются два класса неголономных поверхностей вращения (сферические неголономные поверхности вращения и неголономные поверхности двойного вращения). С помощью построения подвижного репера изучены их основные инварианты, исследованы свойства линий кривизны 1-го и 2-го рода и свойства асимптотических линий неголономных поверхностей данного вида.*

## Введение

Неголономной гиперповерхностью в четырехмерном евклидовом пространстве $E_4$ называют [1] совокупность всех интегральных кривых не вполне интегрируемого уравнения Пфаффа

$$P_\alpha dx^\alpha = 0 \quad (\alpha = \overline{1,4}),$$

где $P_\alpha$ – гладкие функции в некоторой области $G \subset E_4$, причем $P_\alpha$ не обращаются в нуль одновременно ни в какой точке $M \in G$. Интегральные кривые этого уравнения, проходящие через точку $M$, касаются в этой точке одной гиперплоскости, называемой касательной плоскостью неголономной поверхности в точке $M$. Прямая, проходящая через точку $M$ перпендикулярно касательной гиперплоскости, называется нормалью неголономной поверхности в точке $M$.

Подобно тому, как в четырехмерном евклидовом пространстве различают два вида поверхностей вращения (сферические поверхности вращения и поверхности двойного вращения) [2], в неголономной геометрии также будем различать два вида неголономных поверхностей вращения.

***Сферической неголономной гиперповерхностью вращения*** *называется такая неголономная гиперповерхность, все нормали которой пересекают неподвижную прямую (ось вращения).*

***Неголономной гиперповерхностью двойного вращения*** *называется такая неголономная гиперповерхность, нормали которой пересекают две неподвижные взаимноперпендикулярные плоскости (двумерные оси вращения), пересекающиеся в одной точке (центре вращения).*

Пусть $\{M,\vec{e}_\alpha\}$ $(\alpha=\overline{1,4})$ – ортонормированный подвижной репер, в котором $M \in G$, векторы $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ лежат в касательной плоскости неголономной поверхности, а вектор $\vec{e}_4$ по ее нормали в точке $M$.

Деривационные формулы репера $\{M,\vec{e}_\alpha\}$ $(\alpha=\overline{1,4})$ имеют вид

$$d\vec{r} = \omega^\alpha \vec{e}_\alpha, \quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $M$, $\omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha$ $(\alpha,\beta=\overline{1,4})$. Помимо этого имеем

$$D\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta, \quad D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha,$$

где $\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,4}$.

Главными формами являются формы Пфаффа $\omega^\alpha$, $\omega_4^\alpha$. Из них $\omega^\alpha$ – базисные формы, а потому

$$\omega_4^\alpha = A_\beta^\alpha \omega^\beta, \quad \alpha,\beta = \overline{1,4}. \qquad (1)$$

Неголономная поверхность при таком выборе подвижного репера определяется уравнением Пфаффа

$$\omega^4 = 0. \qquad (2)$$

В каждой точке $M$ области $G$ определим линейный оператор $A$ формулой

$$A(d\vec{r}) = d\vec{e}_4.$$

Этот оператор переводит векторы касательной плоскости неголономной гиперповерхности (2) в векторы этой же плоскости. Таким образом, можно сузить оператор $A$ на касательную плоскость. Матрица $A^*$ сужения оператора $A$ имеет вид

$$A^*_{(e)} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения оператора $A^*$, взятые с противоположным знаком, называются *главными кривизнами 2-го рода* неголономной поверхности, а направления собственных векторов оператора $A^*$, соответствующие им, – *главными направлениями 2-го рода* в точке *M*. *Линией кривизны 2-го рода* называется линия неголономной поверхности, в каждой точке которой касательный вектор идет по одному из главных направлений 2-го рода [3].

*Полной кривизной 2-го рода* называется величина

$$K_2 = \det A^*.$$

Если $\omega^4=0$ не голономно, то оператор $A^*$ не симметричен. Его можно разложить на сумму двух операторов [3]: симметричного B и кососимметричного. Собственные значения оператора B, взятые с противоположными знаками, называются *главными кривизнами 1-го рода*, а собственные векторы, им соответствующие, – *главными направлениями 1-го рода* [3].

Так как оператор $B$ – симметричный, то главные кривизны 1-го рода в каждой точке $M \in G$ являются действительными числами.

Определитель $K_1=\det B$ матрицы оператора $B$ называется *полной кривизной 1-го рода*.

## I. Сферические неголономные гиперповерхности вращения

### 1. Меридианы и параллели

Перейдем к рассмотрению сферических неголономных гиперповерхностей вращения (СНПВ). Поместим вектор $\vec{e}_1$ в плоскость, проходящую через нормаль и ось вращения $l$. Пусть $F$ – точка пересечения нормали неголономной поверхности вращения с ее осью $l$, $\vec{F}=\vec{r}+t\vec{e}_4$ – радиус-вектор точки $F$.

Т.к. $F$ описывает прямую $l$ при $\omega^4=0$, то $d\vec{F}$ должен лежать в плоскости $\{M,\vec{e}_1,\vec{e}_4\}$ при условии $\omega^4=0$. Потребовав это, получаем

$$A_1^2 = A_3^2 = A_1^3 = A_2^3 = 0, \quad t = -\frac{1}{A_2^2}, \quad A_2^2 = A_3^3,$$

и характеристическое уравнение оператора $A^*$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} A_1^1-\lambda & A_2^1 & A_3^1 \\ 0 & A_2^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & A_3^3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Так как главные кривизны 2-го рода $k_i=-\lambda_i$ ($i=1,3$), то $k_1=-A_1^1$, $k_2=k_3=-A_2^2$. Таким образом, для СНПВ справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.1.** *Для сферической неголономной гиперповерхности вращения все три кривизны 2-го рода вещественны, при этом две из них, $k_2$ и $k_3$, совпадают, а третья, $k_1$, не равна им.*

Для сферической неголономной гиперповерхности вращения

$$K_2 = -k^2 k_1, \quad \text{где} \quad k = k_2 = k_3.$$

Вектор $\vec{e}_1$ определяет главное направление 2-го рода, соответствующее $k_1$.

Главные направления 2-го рода, соответствующие $k$, определяются уравнениями

$$(A_1^1 - A_2^2)\xi^1 + A_2^1\xi^2 + A_3^1\xi^3 = 0, \quad \xi^4 = 0.$$

и заполняют двумерную плоскость, лежащую в касательной гиперплоскости к $\omega^4=0$. Эта двумерная плоскость пересекает плоскость, ортогональную вектору $\vec{e}_1$, по прямой. Направим вектор $\vec{e}_2$ по этой прямой, тогда $A_2^1$, и репер становится каноническим.

Тогда все функции в формулах (1) – инварианты. Величины $-A_1^1=k_1$, $-A_2^2=-A_3^3=k$ – главные кривизны 2-го рода. Величины $A_4^1$, $A_4^2$, $A_4^3$ – координаты вектора $A_4^1\vec{e}_1+A_4^2\vec{e}_2+A_4^3\vec{e}_3$, представляющего собой вектор кривизны линии тока векторного поля $\vec{e}_4$. И, наконец, инвариантный вектор $\vec{\rho}=\rho\vec{e}_2$, где $\rho=-\frac{1}{2}A_3^1$ – вектор неголономности [3], т.е. вектор, обращение в нуль которого характеризует голономность $\omega^4=0$.

Система уравнений Пфаффа

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0,$$

определяет линии кривизны 2-го рода СНПВ, соответствующие некратной главной кривизне $k_1$. Это означает, что *через каждую точку $M\in G$ проходит одна линия кривизны 2-го рода, соответствующая $k_1$.*

Линии же кривизны 2-го рода, соответствующие кратной главной кривизне $k$ 2-го рода, определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа

$$(k_1 - k)\omega^1 + 2\rho\omega^3 = 0, \quad \omega^4 = 0. \qquad (3)$$

Это означает, что через каждую точку проходит двумерная поверхность, состоящая из тех линий кривизны 2-го рода, которые соответствуют главной кривизне $k$.

Линии кривизны 2-го рода обладают следующими свойствами.

1) Двумерные поверхности, состоящие из тех линий кривизны 2-го рода, которые соответствуют кратной главной кривизне $k$, лежат на трехмерных сферах с центрами на оси вращения.
2) Линии кривизны, соответствующие некратной главной кривизне $k_1$, лежат в двумерных плоскостях, проходящих через ось вращения.

**Определение 1.1.** *Двумерные поверхности, состоящие из линий кривизны 2-го рода и лежащие на трехмерной сфере, называются параллелями СНПВ.*

**Определение 1.2.** *Плоские линии кривизны 2-го рода называются меридианами СНПВ.*

Заметим, что нормали *СНПВ* во всех точках параллели пересекаются в одной точке, лежащей на оси вращения и являющейся центром трехмерной сферы, на которой лежит данная параллель.

### 2. Главные кривизны 1-го рода. Асимптотические линии

Для СНПВ, в выбранном нами каноническом репере матрица оператора $A^*$ имеет вид

$$A^*_{(e)} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & -2\rho \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}.$$

Разложим ее на сумму двух матриц:

$$A^*_{(e)} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & -\rho \\ 0 & -k & 0 \\ -\rho & 0 & -k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение симметричного оператора $B$ с матрицей

$$B_{(e)} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & -\rho \\ 0 & -k & 0 \\ -\rho & 0 & -k \end{pmatrix} \qquad (4)$$

имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k_1-\mu & 0 & -\rho \\ 0 & -k-\mu & 0 \\ -\rho & 0 & -k-\mu \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Корни уравнения (5), взятые с противоположным знаком, – это главные кривизны 1-го рода $k_i^{(1)}$. Пользуясь формулой (5), легко доказать следующую теорему.

**Теорема 1.2.** *Все три главные кривизны 1-го рода сферической неголономной поверхности вращения различны, одна из них совпадает с кратной кривизной 2-го рода.*

Полные кривизны 1-го и 2-го рода СНПВ связаны следующим равенством

$$K_2 = K_1 - k\left|\vec{\rho}\right|^2. \quad (6)$$

Так как $k\neq0$, то из формулы (6) следует, что для СНПВ полные кривизны 1-го и 2-го рода совпадают тогда и только тогда, когда $\omega^4=0$ голономно, что для произвольных неголономных гиперповерхностей в пространстве размерности большей трех неверно [1, 3].

Из равенства $\langle d^2\vec{r},\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\rangle$, характеризующего асимптотические линии [3], нетрудно найти дифференциальные уравнения асимптотических линий СНПВ:

$$k_1(\omega^1)^2 + k(\omega^2)^2 + k(\omega^3)^2 + 2\rho\omega^1\omega^3 = 0, \quad \omega^4 = 0.$$

Совокупность всех касательных к ним в данной точке представляет собой конус 2-го порядка (быть может, вырожденный), который в выбранном репере определяется уравнениями

$$k_1(x^1)^2 + k(x^2)^2 + k(x^3)^2 + 2\rho x^1x^3 = 0, \quad x^4 = 0. \quad (7)$$

### 3. Сферические неголономные гиперповерхности вращения, для которых $K_1=0$

Рассмотрим СНПВ, для которых $K_1=0$. Так как $K_1=\det B_{(e)}$, то

$$k(\rho^2 - kk_1) = 0.$$

Отсюда в неголономном случае ($\rho\neq0$) следует, что $k\neq0$, а $k_1=\rho^2/k$, т.е. ни одна из главных кривизн 2-го рода не равна нулю. Главные же кривизны 1-го рода выражаются следующим образом через главные кривизны 2-го рода

$$k_1^{(1)} = k, \quad k_2^{(1)} = k + k_1, \quad k_3^{(1)} = 0. \quad (8)$$

**Теорема 1.3.** *Если* $K_1=0$ *то всего лишь одна из главных кривизн 1-го рода обращается в нуль.*

Действительно, если $K_1=0$ то главные кривизны 2-го рода $k\neq0$ и $k_1\neq0$. А из (7) видим, что кроме $k_3^{(1)}=0$ больше ни одна из главных кривизн 1-го рода не может обращаться в нуль.

При $K_1=0$ система (6), определяющая множество касательных к асимптотическим линиям, принимает вид

$$(\rho x^1 + kx^3)^2 + k^2(x^3)^2 = 0, \quad x^4 = 0,$$

т. е. конус асимптотических распадается на пару мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой

$$x^1 = x^3 = x^4 = 0. \quad (9)$$

Направляющий вектор этой прямой, вектор $\vec{e}_2$, совпадает с направлением вектора неголономности $\vec{\rho}=\rho\vec{e}_2$.

Главными направлениями 1-го рода, соответствующими главным кривизнам 1-го рода (1.8), будут направления векторов

$$\vec{e}_2, \quad (10)$$

$$\rho\vec{e}_1 + k\vec{e}_3, \quad (11)$$

$$k\vec{e}_1 - \rho\vec{e}_3. \quad (12)$$

А линии кривизны 1-го рода – это линии, определяемые уравнениями

$$\begin{gathered} \omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = 0; \\ \rho\omega^3 - k\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = \omega^4 = 0; \\ k\omega^3 + \rho\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = \omega^4 = 0. \end{gathered} \quad (13)$$

**Теорема 1.4**. *Если* $K_1=0$*, то через каждую точку* $M\in G$ *проходит лишь одна асимптотическая линия, совпадающая с одной из линий кривизны 1-го рода и являющаяся также линией кривизны 2-го рода, лежащей на параллели.*

**Доказательство.** В самом деле, поскольку конус асимптотических касательных распадается на пару мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой (9), то через каждую точку $M\in G$ проходит лишь одна асимптотическая линия с касательной прямой (9). Видим, что направляющий вектор $\vec{e}_2$ этой прямой совпадает с касательным вектором к линии кривизны 1-го рода (13). Сравнивая уравнения (13), определяющие линии кривизны 1-го рода, с уравнениями (3), которые определяют параллели, видим, что в каждой точке $M\in G$ линия кривизны 1-го рода (13) является также одной из линий кривизны 2-го рода, лежащей на параллели. Таким образом, если $K_1=0$, то единственная действительная асимптотическая линия, проходящая через произвольную точку $M\in G$, совпадает с линией кривизны 1-го рода, а также является линией кривизны 2-го рода, лежащей на параллели. Теорема доказана.

Выясним теперь вопрос о сопряженности главных направлений 1-го рода относительно основного линейного оператора $A^*$. Нетрудно показать, что

$$\left\langle \vec{e}_2, A^*(\rho\vec{e}_1 + k\vec{e}_3)\right\rangle = 0 \text{ и } \left\langle \rho\vec{e}_1 + k\vec{e}_3, A^*\vec{e}_2\right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \vec{e}_2, A^*(k\vec{e}_1 - \rho\vec{e}_3)\right\rangle = 0 \text{ и } \left\langle k\vec{e}_1 - \rho\vec{e}_3, A^*\vec{e}_2\right\rangle = 0.$$

Отсюда видим, что главное направление 1-го рода, являющееся направлением асимптотической, взаимно сопряжено относительно оператора $A^*$ с другими направлениями 1-го рода.

**Теорема 1.5.** *Не являются сопряженными те главные направления 1-го рода, которые ортогональны главному направлению 1-го рода, совпадающему с направлением асимптотической (в неголономном случае).*

**Доказательство.** Главные направления 1-го рода, ортогональные направлению асимптотической, есть направления векторов $\rho\vec{e}_1+k\vec{e}_3$ и $\rho\vec{e}_1-k\vec{e}_3$. Покажем, что эти векторы являются сопряженными лишь при $\rho=0$. Для этого вычислим скалярное произведение

$$\left\langle \rho\vec{e}_1 + k\vec{e}_3, A^*(k\vec{e}_1 - \rho\vec{e}_3)\right\rangle = \rho(\rho^2 + k^2).$$

Видим, что это выражение отлично от нуля, поскольку $k\neq0$ и $\rho\neq0$. Следовательно, главное направление (11) 1-го рода не сопряжено главному направлению (12) 1-го рода. Аналогично можно показать, что

$$\left\langle k\vec{e}_1-\rho\vec{e}_3, A^*(\rho\vec{e}_1+k\vec{e}_3)\right\rangle=-\rho(\rho^2+k^2)\neq 0.$$

Значит, и главное направление (12) 1-го рода не сопряжено главному направлению (11) 1-го рода. Таким образом, главные направления (11) и (12) не являются сопряженными в неголономном случае. Теорема доказана.

## II. Неголономные гиперповерхности двойного вращения

### 1. Меридианы и параллели

Рассмотрим теперь неголономные поверхности двойного вращения (НПДВ). Направим вектор $\vec{e}_1$ по главному направлению 2-го рода. Тогда $A_1^1=-k_1$, $A_1^2=A_1^3=0$. Кроме этого за счет выбора репера положим $A_3^2=0$, и репер становится каноническим.

**Теорема 2.1.** *Для НПДВ все три кривизны 2-го рода вещественны и различны.*

Действительно, при данном выборе репера характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} A_1^1-\lambda & A_2^1 & A_3^1 \\ 0 & A_2^2-\lambda & A_3^2 \\ 0 & 0 & A_3^3-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Поскольку главные кривизны 2-го рода $k_i=-\lambda_i$, то $k_i=-A_i^i(i=\overline{1,3})$. Отсюда видим, что все главные кривизны 2-го различны и вещественны.

Так как репер $\{M,\vec{e}_\alpha\}$ $(\alpha=\overline{1,4})$ – канонический, то все функции в формулах (1) – инварианты. Вектор неголономности [3] для НПДВ имеет вид $\vec{\rho}=\rho_1\vec{e}_1+\rho_2\vec{e}_2+\rho_3\vec{e}_3$,

где $\rho_1=\dfrac{A_3^2}{2}$, $\rho_2=-\dfrac{A_3^1}{2}$, $\rho_3=\dfrac{A_2^1}{2}$.

Из требования того, что нормали НПДВ пересекают две неподвижные взаимноперпендикулярные плоскости (двумерные оси вращения), получаем, что $\rho_1=0$. Тогда линии кривизны 2-го рода НПДВ – это линии, определяемые уравнениями

$$\omega^2=\omega^3=\omega^4=0; \qquad (14)$$

$$(k_2-k_1)\omega^1+2\rho_3\omega^2=0, \quad \omega^3=\omega^4=0; \qquad (15)$$

$$(k_3-k_1)\omega^1-2\rho_2\omega^3=0, \quad \omega^2=\omega^4=0. \qquad (16)$$

Для линий кривизны 2-го рода НПДВ справедливы следующие утверждения:

1) Линии кривизны 2-го рода, соответствующие главным кривизнам $k_2$ и $k_3$ 2-го рода, лежат на двумерных сферах, с центрами на плоскостях вращения, а нормали НПДВ описывают вдоль них конусы с вершинами, также лежащими на этих плоскостях.
2) Линии кривизны 2-го рода, соответствующие кривизне $k_1$, лежат в двумерных плоскостях, проходящих через нормаль и центр вращения НПДВ.

**Определение 2.1.** *Линии НПДВ, лежащие на двумерных сферах, называются параллелями НПДВ.*

**Определение 2.2.** *Плоские линии кривизны 2-го рода НПДВ называются меридианами НПДВ.*

Через каждую точку $M\in G$ НПДВ проходит один меридиан и две параллели.

Угол между двумя параллелями (15) и (16), проходящими через точку $M\in G$, находится из равенства

$$\cos\varphi_1=\frac{4\rho_2\rho_3}{\sqrt{(4(\rho_3)^2+(k_2-k_1)^2)(4(\rho_2)^2+(k_3-k_1)^2)}}.$$

Выражения

$$\cos\varphi_2=\frac{2\rho_3}{\sqrt{4(\rho_3)^2+(k_2-k_1)^2}},$$

$$\cos\varphi_3=\frac{2\rho_2}{\sqrt{4(\rho_2)^2+(k_3-k_1)^2}},$$

определяют углы соответственно между параллелью (15) и меридианом (14) и второй параллелью (16) и меридианом (14).

### 2. Главные кривизны 1-го рода НПДВ. Асимптотические линии

Для неголономных поверхностей двойного вращения в построенном нами репере матрица $A^*$ имеет вид

$$A^*_{(e)}=\begin{pmatrix} -k_1 & 2\rho_3 & -2\rho_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{pmatrix}.$$

Разложив ее на сумму двух матриц, видим, что симметричный оператор $B$ имеет матрицу

$$B_{(e)}=\begin{pmatrix} -k_1 & \rho_3 & -\rho_2 \\ \rho_3 & -k_2 & 0 \\ -\rho_2 & 0 & -k_3 \end{pmatrix}.$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k_1-\mu & \rho_3 & -\rho_2 \\ \rho_3 & -k_2-\mu & 0 \\ -\rho_2 & 0 & -k_3-\mu \end{vmatrix}=0.$$

Обозначим через $k_1^{(1)}$, $k_2^{(1)}$, $k_3^{(1)}$, – главные кривизны 1-го рода НПДВ.

Связь между полными кривизнами 1-го и 2-го рода выражается следующим равенством

$$K_1=K_2+k_2(\rho_2)^2+k_3(\rho_2)^2.$$

Находим дифференциальные уравнения асимптотических линий НПДВ:

$$k_1(\omega^1)^2+k_2(\omega^2)^2+k_3(\omega^3)^2-$$
$$-2\rho_3\omega^1\omega^2+2\rho_2\omega^1\omega^3=0, \quad \omega^4=0.$$

Для НПДВ система уравнений

$$\begin{aligned} &k_1(x^1)^2+k_2(x^2)^2+k_3(x^3)^2- \\ &-2\rho_3x^1x^2+2\rho_2x^1x^3=0, \quad x^4=0. \end{aligned} \qquad (17)$$

определяет совокупность касательных к асимптотическим линиям в некоторой точке $M\in G$ НПДВ.

### 3. Неголономные гиперповерхности двойного вращения, для которых $K_1=0$

Пусть для НПДВ $K_1=0$.

**Теорема 2.2.** *Если $K_1=0$, то лишь одна из главных кривизн 1-го рода НПДВ равна нулю.*

В самом деле, если бы две главные кривизны 1-го рода обращались в нуль, то в характеристическом уравнении

$$\mu^3+(k_1+k_2+k_3)\mu^2+$$
$$+(k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1-(\rho_2)^2-(\rho_3)^2)\mu+$$
$$|\,k_1k_2k_3-(\rho_2)^2k_2-(\rho_2)^2k_3=0$$

свободный член и коэффициент при $\mu$ обращались бы в нуль, то есть

$$k_1k_2k_3-(\rho_2)^2k_2-(\rho_3)^2k_3=0,$$
$$k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1-(\rho_2)^2-(\rho_3)^2=0.$$

Отсюда получаем

$$(\rho_2)^2(k_2)^2+(k_2k_3)^2+(\rho_3)^2(k_3)^2=0, \quad (k_2\neq 0, k_3\neq 0). \qquad (18)$$

Это равенство не имеет места. Поэтому в случае нулевой полной кривизны 1-го рода только одна из главных кривизн 1-го рода равна нулю. Теорема доказана.

Итак, если $K_1=0$, то для НПДВ выполняется равенство (18).

Уравнения касательных к асимптотическим линиям (17) НПДВ при условии (18) примут вид

$$\rho_2x^1+k_3x^3=\pm\sqrt{-\frac{k_3}{k_2}}(\rho_3x^1-k_2x^2), \quad x^4=0.$$

Это означает, что конус касательных к асимптотическим [3] распадается на пару плоскостей (действительных в случае $\operatorname{sign}k_2\neq\operatorname{sign}k_3$ или мнимых, если $\operatorname{sign}k_2=\operatorname{sign}k_3$).

Прямая пересечения этих плоскостей всегда будет действительной прямой. Она определяется уравнениями

$$\rho_2x^1+k_3x^3=0, \quad \rho_3x^1-k_2x^2=0, \quad x^4=0. \qquad (19)$$

Асимптотическая линия, касательный вектор

$$\vec{a}(k_2k_3, k_3\rho_3, -k_2\rho_2)$$

которой идет в направлении прямой (19), определяется системой

$$\rho_2\omega^1+k_3\omega^3=0, \quad \rho_3\omega^1-k_2\omega^2=0, \quad \omega^4=0. \qquad (20)$$

Главное направление 1-го рода, соответствующее нулевой главной кривизне 1-го рода, определяется вектором

$$\vec{\xi}(k_2k_3 : k_3\rho_3 : -k_2\rho_2)$$

и является касательным к линии кривизны 1-го рода, имеющей уравнения (20).

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 2.3.** *Пусть $K_1=0$ и $l$ – линия пересечения плоскостей, на которые распадается конус касательных к асимптотическим линиям НПДВ. Тогда в каждой точке $M\in G$ линия кривизны 1-го рода, соответствующая нулевой главной кривизне 1-го рода, совпадает с той асимптотической линией, которая касается прямой $l$.*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Роговой М.Р. К метрической теории неголономных гиперповерхностей в $n$-мерном пространстве // Укр. геом. журнал. – 1968. – № 5–6. – С. 126–138.
2. Васильева О.В. Поверхности вращения в четырехмерном евклидовом пространстве // Наука и образование: Матер. VII Всеросс. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. – Томск, 2003. – Т. 1. – С. 21–27.
3. Онищук Н.М. Геометрия векторного поля в четырехмерном евклидовом пространстве // Междунар. конф. по математике и механике: Избранные доклады. – Томск, 2003. – С. 60–68.